

Conservatoire National des Arts et Métiers

Spécialité Instrumentation Mesure

Option Contrôle Industriel

Examen d'oral probatoire

**L'apport des méthodes de simulation dans
l'évaluation des incertitudes de mesure**

Par

Frédéric LETELLIER

Soutenance le 25 janvier 2007

Membres du jury :

M. Patrick JUNCAR (président du jury)

M. Michel LECOLLINET (tuteur)

Mme Nadine DE COURTENAY (membre du jury)

Mme Annick RAZET (membre du jury)

Conservatoire National des Arts et Métiers

Spécialité Instrumentation Mesure
Option Contrôle Industriel

Examen d'oral probatoire

L'apport des méthodes de simulation dans l'évaluation des incertitudes de mesure

Par
Frédéric LETELLIER



Soutenance le 25 janvier 2007

Membres du jury :

M. Patrick JUNCAR (président du jury)

M. Michel LECOLLINET (tuteur)

Mme Nadine DE COURTENAY (membre du jury)

Mme Annick RAZET (membre du jury)

Résumé :

Quand on fournit un résultat de mesure, il est important de fournir également une incertitude sur la valeur donnée.

La première partie de ce document explique ce que sont les incertitudes de mesure, ainsi que les techniques recommandées pour les déterminer. Cette méthode recommandée pour déterminer les incertitudes de mesure est parfois difficile à mettre en pratique et en conséquence, il peut être intéressant d'utiliser des méthodes alternatives.

La seconde partie montre qu'il est possible d'estimer les incertitudes de mesures à l'aide de simulations. Cette partie détaille en particulier le principe de fonctionnement de la méthode de Monte Carlo qui est la méthode de simulation souvent préconisée. Cela nous permet de voir les principaux avantages de la Méthode de Monte Carlo dans la détermination des incertitudes de mesures.

Enfin, la troisième partie fait des comparaisons entre la méthode analytique et la méthode de Monte Carlo. Ces comparaisons permettent de voir, que le choix de la méthode pour laquelle opter afin de déterminer les incertitudes de mesures dépend beaucoup du contexte.

Mots clés : Métrologie, Simulation numérique, Incertitudes de mesure, Méthode Monte Carlo, Méthode statistique

Abstract :

When a measurement result is provided, it's important to also provide an uncertainty on the value given.

The first part of this document explains what are uncertainties of measurement and the techniques recommended to determine them. This method recommended to determine uncertainties of measurement is sometimes difficult to put into practice. Consequently, it can be interesting to use alternative methods.

The second part shows that it's possible to estimate uncertainties of measurement using simulations. This part details in particular the principle of the operation of the Monte Carlo method which is the method often recommended for simulations. That allows us to see the principal advantages of the Monte Carlo method in the determination of uncertainties of measurements.

Lastly, the third part makes comparisons between the analytical method and the Monte Carlo method. These comparisons make it possible to see that the choice of the method to determine uncertainties of measurement depends much of the context.

Keywords : Metrology, Numerical simulation, uncertainties of measurement, Monte Carlo method, Statistical method

Table des matières

Liste des figures et des formules.....	5
Glossaire et définitions.....	6
<u>Introduction.....</u>	<u>7</u>
<u>Chapitre 1 - Les incertitudes de mesure.....</u>	<u>7</u>
1.1 Rappel sur les incertitudes de mesure.....	7
1.2 Détermination de l'incertitude de mesure.....	8
1.2.1 Le calcul du résultat de mesure.....	9
1.2.2 Le calcul des incertitudes-types.....	10
1.2.3 Détermination de l'incertitude composée.....	11
1.2.4 Détermination de l'incertitude élargie.....	11
1.3 Les limites de l'évaluation des incertitudes par la méthode du GUM.....	12
<u>Chapitre 2 - Les Méthodes de simulation.....</u>	<u>13</u>
2.1 Objectif des simulations numériques.....	13
2.2 La Méthode de Monte Carlo.....	14
2.2.1 Présentation générale de la MCM.....	14
2.2.2 Historique de la Méthode de MCM.....	15
2.2.3 Générateur de nombre aléatoires.....	15
2.3 Principe de fonctionnement de la MCM appliqué au calcul d'incertitude.....	17
2.4 Les limites de la Méthode de Monte Carlo.....	20
<u>Chapitre 3 – Comparaison de la méthode analytique avec la MCM.....</u>	<u>21</u>
3.1 Différences dans la façon de propager les incertitudes.....	21
3.2 Modèles linéaires et non linéaires.....	22
3.3 Constance des valeurs d'entrée.....	24
Conclusion.....	25
Bibliographie.....	26

Liste des figures

Figure 1.1 : Présentation d'une valeur mesurée avec son incertitude.....	8
Figure 1.2 : Schéma de la méthode des « 5 M »	9
Figure 1.3 : Incertitude élargie dans le cas d'une loi normale.....	11
Figure 1.4 : Récapitulatif de la méthode analytique.....	11
Figure 2.1 : Principe de la propagation des incertitudes par la MCM.....	17
Figure 2.2 : Principe de transformation en une loi Normale.....	17
Figure 3.1 : Représentation d'une loi uniforme.....	21
Figure 3.2 : Représentation d'une loi triangulaire.....	21
Figure 3.3 : Représentation d'une loi normale.....	21

Liste des formules

Formule 1.1 : Modèle mathématique du processus de mesure.....	10
Formule 1.2 : Formule de la loi de propagation des incertitudes.....	11
Formule 2.1 : Exemple de relation permettant la génération d'une suite pseudo-aléatoire....	16
Formule 2.2 : Fonction de répartition.....	17
Formule 2.3 : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.....	18
Formule 2.4 : Variables distribuées suivant une loi normale centrée.....	18
Formule 2.5 : Loi des grands nombres qui démontre la convergence de la MCM.....	18
Formule 3.1 : Relation entrée la durée de chute d'un objet et la hauteur parcourue.....	23
Formule 3.2 : Pour trouver l'espérance de Y, on utilise la valeur moyenne de X.....	23
Formule 3.3 : Pour trouver l'espérance de Y, on prend la moyenne des valeurs de sortie.....	24

Remerciements :

Je tiens à remercier Monsieur Michel LECOLLINET pour avoir su me conseiller pendant toute la durée du probatoire.

Glossaire et définitions

- **BIPM** : Bureau International des Poids et Mesures
Le Bureau international des poids et mesures est une des trois organisations établies pour maintenir le Système International (SI) sous les termes de la Convention du Mètre.
- **CIPM** : Comité International des Poids et Mesures
Le Comité international des poids et mesures (CIPM) comprend dix-huit personnes de pays membres de la Convention du Mètre (1875). Il s'agit de la plus haute autorité mondiale en métrologie.
- **GUM** : Guide pour l'Expression de l'Incertitude de Mesure
Ouvrage de référence qui établit les règles générales pour l'expression de l'incertitude de mesure.
- **PDF** : Probability Density Function / Fonction de densité de probabilité
On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire X réelle continue une fonction f qui est positive ou nulle sur \mathfrak{R} , intégrable sur \mathfrak{R} et dont l'intégrale sur \mathfrak{R} vaut 1.
- **MCM** : Méthode de Monte Carlo
On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. C'est la méthode recommandée par le GUM dans son annexe 1.
- **VIM** : Vocabulaire International des termes généraux et fondamentaux de Métrologie

Introduction

Lorsqu'on rend compte du résultat d'un mesurage d'une grandeur physique, il faut obligatoirement donner une indication quantitative sur la qualité du résultat pour que ceux qui l'utiliseront puissent estimer sa fiabilité.

Dans notre société moderne, il est souvent important de pouvoir quantifier avec une grande précision le doute que l'on a sur le résultat du mesurage car c'est à partir de ces résultats que seront prises des décisions.

En raison de la mondialisation, il s'est fait sentir un besoin d'uniformiser les incertitudes de mesures. Il a donc été créé des instances internationales chargées de mettre en place des règles communes pour déterminer les incertitudes de mesures.

Principalement grâce aux nouvelles capacités de calcul des ordinateurs, de nouvelles méthodes sont apparues pour estimer les incertitudes de calcul. Il s'agit de simulations numériques qui sont souvent plus simples à mettre en place que les méthodes traditionnelles.

Nous commencerons par voir ce qu'est la méthode traditionnelle de calcul des incertitudes de mesures, puis nous verrons ce que sont les méthodes de simulation et en quoi, cela peut aider à déterminer les incertitudes de mesure.

Chapitre 1 – Les incertitudes de mesure

1.1 Rappel sur les incertitudes de mesure

Dans ce chapitre, nous allons voir ce que sont les incertitudes de mesure et comment on les calcule.

Le Comité International des Poids et Mesures (CIPM) qui est la plus haute autorité technique en métrologie a confié au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) de rédiger un ouvrage sur l'expression de l'incertitude de mesure devant servir de référence internationale. Le groupe de travail du BIPM a permis la rédaction d'un guide (« Guide pour l'Expression de l'Incertitude de Mesure » GUM [1]) qui fournit des règles pour l'expression de l'incertitude de mesure, utilisables en normalisation, dans l'étalonnage, dans l'accréditation des laboratoires et dans les services de métrologie. C'est en s'appuyant sur cet ouvrage que nous allons vous présenter les incertitudes de mesure.

Un autre ouvrage de référence sur lequel nous nous appuyerons est le « Vocabulaire International des termes généraux et fondamentaux de Métrologie » [2] (VIM) qui donne les définitions officielles des termes de métrologie.

Avant de voir comment on détermine l'incertitude d'une mesure, nous allons nous intéresser à ce qu'est une incertitude. Le mot incertitude signifie doute. Ainsi, dans son sens le plus large, « incertitude de mesure » signifie doute sur la validité du résultat d'un mesurage.

Voici la définition donnée par le VIM de 1993 : « Paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande »

Trois remarques concernant cette définition.

- Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé).
- L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.
- Il est entendu que le résultat du mesurage est la meilleure estimation de la valeur du mesurande, et que toutes les composantes de l'incertitude, y compris celles qui proviennent d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux corrections et aux étalons de référence, contribuent à la dispersion.

On peut résumer la définition en disant que l'incertitude de mesure permet d'estimer la confiance que l'on peut avoir dans un résultat.

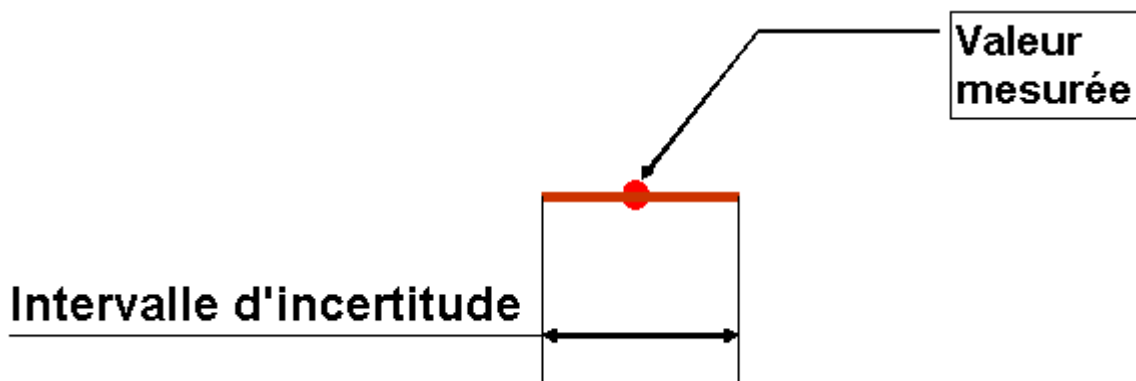


Figure 1.1 : Présentation d'une valeur mesurée avec son incertitude
On peut voir que le résultat de mesure n'est pas une valeur unique, mais une distribution de valeurs

Voici 5 raisons d'utiliser les incertitudes de mesure :

- Un indicateur de la qualité de la mesure
- Une approche pour comprendre le processus de mesure
- Un outil d'optimisation du processus de mesure
- Un engagement contractuel
- Une donnée incontournable dans l'exploitation du résultat par le client

Maintenant que nous en savons un peu plus sur ce qu'est une incertitude de mesure, nous allons essayer de comprendre comment on la détermine.

1.2 Détermination de l'incertitude de mesure

Nous allons essayer de comprendre comment sont déterminées les incertitudes de mesure. Nous allons nous contenter de rappels car il serait trop long d'entrer dans les détails.

Le GUM propose une démarche structurée en 4 étapes pour déterminer l'incertitude de mesure. C'est cette démarche qui est dite « analytique » que nous allons étudier.

1.2.1 Etape 1 : le calcul du résultat de mesure

Définition du mesurande

Tout d'abord, voyons la définition du mesurande donnée par le VIM : « grandeur particulière soumise à mesurage ».

La définition du mesurande peut nécessiter des indications relatives à des grandeurs telles que la température ou la pression.

Avant de commencer les mesures, il est important de bien définir ce que l'on va mesurer.

Analyse du processus de mesure

Il s'agit d'identifier les facteurs qui influencent le résultat de mesure (causes d'erreurs) pour en dresser une liste aussi exhaustive que possible.

La technique la plus courante d'analyse de processus de mesure est la méthode des 5 M

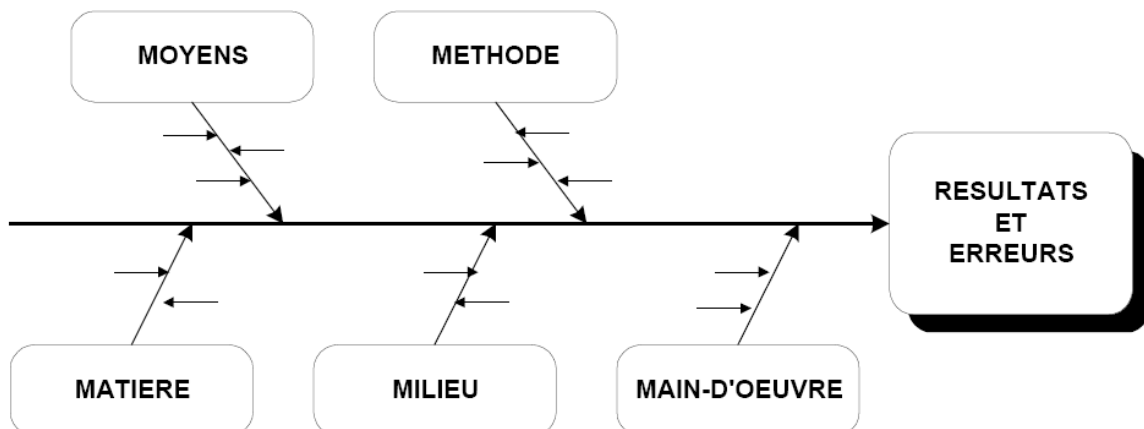
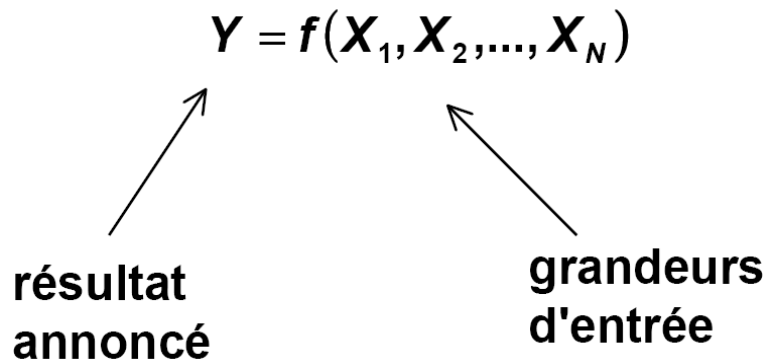


Figure 1.2 : Schéma de la méthode des « 5 M »

Le modèle mathématique du processus de mesure

Modéliser le processus de mesure, c'est transcrire sous forme mathématique, la façon dont nous avons utilisé toutes les informations que nous avons à notre disposition pour calculer le résultat de mesures que nous annonçons.

Dans de nombreux cas, un mesurande Y n'est pas mesuré directement, mais est déterminé à partir de N autres grandeurs à travers une relation fonctionnelle f .



Formule 1.1 : Modèle mathématique du processus de mesure

Les grandeurs d'entrée : les lectures des instruments ou leurs moyennes, les corrections d'étalonnage, des constantes physiques, etc...

La fonction f : exprime le processus de mesure, en tenant compte de toutes les grandeurs qui contribuent significativement à l'incertitude du résultat final.

1.2.2 Etape 2 : le calcul des incertitudes-types

Sur chacune des grandeurs d'entrée, nous avons un doute (c'est à dire des composantes d'incertitude). C'est la composition de ces doutes qui engendrera le doute ou l'incertitude sur le résultat.

Nous allons donc voir comment on peut évaluer (estimer) les doutes sur les grandeurs d'entrée.

L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique.

Les méthodes d'évaluation de type A et de type B

Il y a deux méthodes :

- Type A : celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques
- Type B : celles qui sont évaluées par d'autres moyens

Une évaluation de type B de l'incertitude-type s'effectue par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles qui peuvent comprendre : des résultats de mesures antérieures, l'expérience ou la connaissance générale du comportement des matériaux et des instruments utilisés, des spécifications du fabricant, des données fournies par des certificats d'étalonnage et d'autres documents, etc.

Pour le calcul de type B, on est particulièrement attentif à la forme de la distribution de probabilité de la grandeur considérée (normale, uniforme...), ainsi qu'à l'étendue de variation possible de la grandeur considérée.

1.2.3 Etape 3 : détermination de l'incertitude composée

Loi de propagation des incertitudes

Une fois que le modèle mathématique du processus est déterminé et que nous avons déterminé le calcul des incertitudes-types des valeurs d'entrée, nous pouvons appliquer la loi de propagation des incertitudes.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Formule 1.2 : Formule de la loi de propagation des incertitudes

Le terme $u(x_i)$ correspond à l'incertitude type d'une estimation d'entrée x_i . Le terme $u(x_i, x_j)$ exprime la covariance estimée associée à deux estimations d'entrée x_i et x_j .

A noter aussi qu'il s'agit d'une relation approchée limitée au premier ordre. Il peut arriver que cette formule ne soit pas appropriée et dans ce cas, il faut développer à un ordre supérieur.

1.2.4 Etape 4 : détermination de l'incertitude élargie

Exprimer le résultat et son incertitude

L'incertitude élargie s'obtient en multipliant l'incertitude composée par un facteur d'élargissement k .

En général, on choisit $k=2$, ce qui donne dans le cas d'une loi Normale, une probabilité de 95% que la véritable valeur du mesurande se trouve dans l'intervalle.

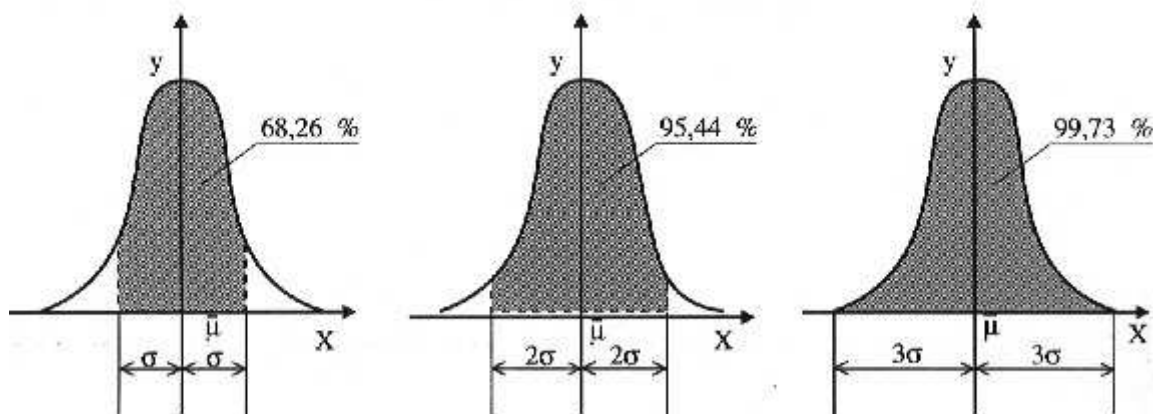


Figure 1.3 : Incertitude élargie dans le cas d'une loi normale

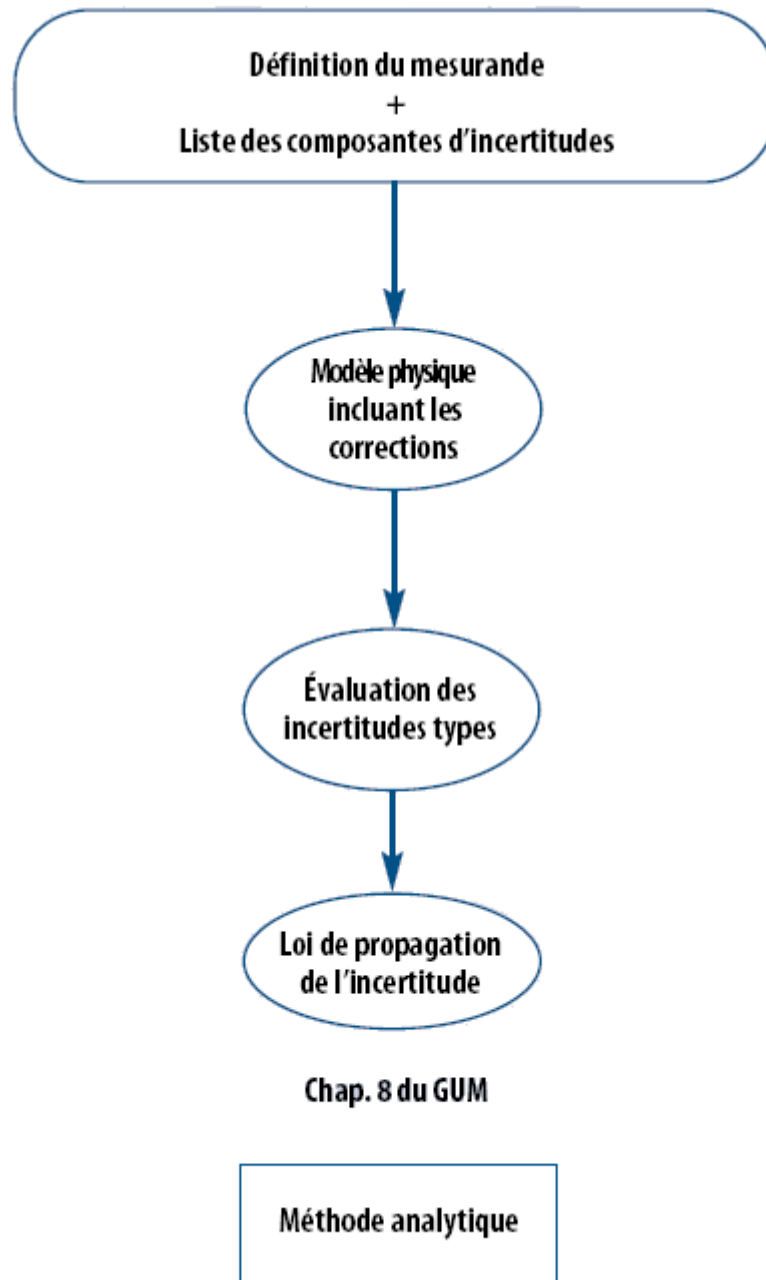


Figure 1.4 : Récapitulatif de la méthode analytique

A présent que nous avons vu comment le GUM recommandait de déterminer les incertitudes de mesure, nous allons voir les limites de cette méthode.

1.3 Les limites de l'évaluation des incertitudes par la méthode du GUM

Pour réaliser la méthode analytique, il faut écrire un modèle physique où une relation fonctionnelle f relie les grandeurs d'entrée au mesurande. Ensuite, il faut évaluer les incertitudes-types de ces grandeurs d'entrée et enfin appliquer la loi de propagation des incertitudes en utilisant la relation fonctionnelle f .

L'objectif du GUM est de donner une méthode juste permettant de déterminer les incertitudes de mesure.

Il y a de nombreux secteurs (automobile, aéronautique, météorologique) qui ont réalisé des modèles réalistes en intégrant de très nombreuses données d'entrées mais cela rend en même temps le modèle beaucoup plus compliqué.

Dans le cas d'un modèle complexe, cela peut être fastidieux de déterminer les incertitudes de mesure en utilisant la méthode analytique, ce qui peut signifier que les résultats peuvent mettre longtemps avant d'être trouvés et que cela peut avoir un coût élevé.

Dans ce cas, on peut décider de simplifier le modèle, en sachant que cela réduira l'exactitude des résultats, ou bien, utiliser une méthode plus simple que la méthode analytique.

Dans les cas où la méthode analytique préconisée par le GUM n'est pas adaptée, on utilise en général une solution utilisant des simulations numériques.

Chapitre 2 – Les Méthodes de simulation

Le guide GUM propose dans son chapitre VIII, une procédure analytique pour évaluer l'incertitude de mesure. Mais à partir du moment où l'esprit du GUM est respecté, rien n'interdit d'utiliser d'autres techniques pour évaluer l'incertitude.

Cependant, la procédure analytique reste la procédure de référence et donc, ce n'est que dans le cas où il existe une raison valable de ne pas appliquer cette procédure que l'on peut réfléchir à une autre solution.

Généralement, la raison qui pousse à ne pas appliquer la méthode analytique, c'est la difficulté de mettre en équation tous les facteurs pouvant contribuer à l'incertitude.

Si on prend l'exemple de la biologie, il est parfois difficile ou impossible de réaliser des expériences sur matériel vivant, pour des raisons économiques, techniques ou éthiques. Dans ces cas de figures, la simulation a un grand intérêt dans une perspective d'explication ou de prédiction.

Pour remplacer la méthode analytique, il est donc possible d'utiliser une méthode de simulations. Nous allons voir ce que peuvent nous apporter les simulations numériques.

2.1 Objectif des simulations numériques

La tendance dans l'industrie est à l'utilisation de plus en plus prononcée de la maquette numérique. Beaucoup d'erreurs, ou plutôt de différences de résultats entre le calcul et l'expérimental, viennent des incertitudes des données d'entrées. Aussi, il apparaît de plus en plus essentiel de connaître la pertinence des résultats par rapport aux « aléas » des données. Le problème n'est plus de connaître le résultat de calcul pour une configuration, mais d'y ajouter la pertinence du résultat par rapport aux incertitudes des données d'entrées. La maîtrise de la dispersion des résultats devient un enjeu majeur, car elle permet de mieux comprendre et de mieux interpréter les résultats expérimentaux.

L'intérêt pour ces méthodes non-déterministes est également relayé par le développement des méthodes numériques d'aide à la conception, dans lesquelles les concepteurs souhaitent non

seulement « optimiser » leurs produits mais aussi les rendre « robustes ». Il s'agit de faire en sorte que les performances du produit soient bien sûr les meilleures possibles. Cependant, une conception moins performante peut être préférée si elle est moins sensible aux aléas. C'est la notion de « robustesse ».

La démarche globale de simulation numérique est d'assurer une réduction des coûts, la diminution des essais réels et l'accroissement de la qualité des produits.

Si les méthodes de simulation sont de plus en plus fréquemment utilisées, c'est grâce aux progrès réguliers des outils informatiques et de modélisation qui permettent aujourd'hui de simuler des systèmes complexes, associant de plus en plus de phénomènes physiques couplés et faisant intervenir des échelles caractéristiques variées. Ces progrès s'accompagnent de la nécessité de fournir une information de plus en plus précise sur le système à simuler (propriétés physiques du milieu, constantes de modélisation...). Dans de nombreux cas, une caractérisation statistique du système se révèle parfois plus adaptée, soit en raison d'une nature intrinsèquement stochastique (par exemple la distribution spatiale de la conductibilité hydraulique dans un aquifère), soit du fait d'une méconnaissance du système réel ou de difficultés expérimentales dans l'estimation ou la mesure des constantes de modélisation. Pour ces situations, il est souhaitable de caractériser statistiquement (moyennes, premiers moments, fonctions de densité de probabilité...) l'incertitude sur la prédiction (solution numérique), connaissant les distributions statistiques des diverses données incertaines du problème. Les objectifs de la propagation et de la quantification de l'impact des incertitudes lors d'une simulation sont, entre autres, de fournir des barres d'erreurs numériques facilitant la comparaison avec des observations expérimentales et ainsi de mieux juger de la qualité des modèles physiques employés ; d'identifier les paramètres incertains ayant le plus grand impact sur la simulation et devant donc être mesurés ou contrôlés avec le plus de précision ; de mener une analyse de sureté (probabilité de dépassement de valeurs critiques) et de jauger du degré de confiance que l'on peut accorder aux calculs, lors de la prise de décisions de conception par exemple.

L'état de l'art actuel consiste à multiplier les calculs en faisant varier les paramètres indépendamment (Simulations de Monte-Carlo) les uns des autres. Des méthodes d'Eléments Finis « Stochastiques » ont également été développées pour les analyses Eléments Finis « standards » (statique ou dynamique linéaire). Il est également toujours possible de remplacer dans une méthode de simulation de type Monte-Carlo les calculs exacts par l'évaluation de fonctions explicites approchées.

Il existe plusieurs méthodes de simulations numériques mais nous allons en particulier nous intéresser à la Méthode de Monte Carlo (MCM) qui est la méthode préconisée par le GUM dans son supplément 1 [3] (il présente la théorie et la pratique de la méthode de Monte Carlo appliquée à la propagation des lois de distribution.).

2.2 La Méthode de Monte Carlo

2.2.1 Présentation générale de la MCM

La méthode de Monte Carlo consiste en des simulations expérimentales ou informatiques de problèmes mathématiques ou physiques, basées sur le tirage de nombres aléatoires.

La Méthode de Monte Carlo permet la résolution de certains problèmes numériques déterministes. On résout les problèmes de façon approchée avec une simulation.

Nous allons voir ce qu'était la méthode de Monte Carlo à l'origine.

2.2.2 Historique de la MCM

Le véritable développement des méthodes de Monte Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de John von Neumann et Ulam [5] notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

Les méthodes de Monte Carlo sont particulièrement utilisées en physique, où l'on calcule des algorithmes qui permettent ensuite d'analyser des résultats d'expériences. Ces méthodes sont également utilisées dans le milieu de la finance.

Nous allons voir un exemple simple pour comprendre son principe de fonctionnement.

Exemple : calcul de l'aire d'un lac

Soit une zone rectangulaire ou carrée dont la longueur des côtés est connue. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle. Pour trouver l'aire du lac, on demande à une armée de tirer X coups de canon de manière aléatoire sur cette zone. On compte ensuite le nombre N de boulets qui sont restés sur le terrain, on peut ainsi déterminer le nombre de boulets qui sont tombés dans le lac : $X-N$. Il suffit ensuite d'établir un rapport entre les valeurs :

Par exemple, si le terrain fait 1000 m^2 , que l'armée tire 500 boulets et que 100 projectiles sont tombés dans le lac alors la superficie du plan d'eau est de : $100 \cdot 1000 / 500 = 200 \text{ m}^2$.

A partir de cet exemple, on peut constater que la mise en place de la MCM est assez simple. En revanche, on peut douter de son efficacité car il faut un grand nombre de tirages pour avoir une estimation correcte. La théorie mathématique nous dit qu'avec un nombre infini de tirages, on trouvera la valeur exacte. La qualité de l'estimation est donc directement liée au nombre de tirages effectués.

Comme nous avons pu le voir dans cet exemple, la MCM nécessite l'utilisation d'un générateur de nombre aléatoires. Monte Carlo est très connu pour ses jeux de hasard et en particulier pour la roulette de son casino qui a la réputation de sortir des suites aléatoires. C'est de là que provient la dénomination MCM.

2.2.3 Générateur de nombres aléatoires

Ces générateurs sont utiles dans plusieurs domaines et le nombre de leurs applications sera très certainement amené à évoluer au cours du temps. Ils jouent d'ores et déjà un rôle majeur en physique dans les domaines de la simulation et de l'analyse.

La qualité du générateur aléatoire est primordiale pour avoir de bons résultats dans la méthode de Monte Carlo. Un générateur biaisé apportera des informations réduites.

Un générateur aléatoire « parfait » n'est cependant pas toujours nécessaire et un générateur pseudo aléatoire pourra souvent être suffisant.

Ce générateur pseudo-aléatoire doit pouvoir générer des valeurs non corrélées et ayant une période élevée comparée au nombre de tirages à effectuer.

Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires ont fait de grands progrès ces dernières années grâce à de nouveaux algorithmes, ainsi que grâce aux processeurs des ordinateurs qui sont passés de mots de 32 bits à des mots de 64 bits. Ces progrès dans la génération de nombres aléatoires améliorent l'efficacité, tant au niveau de la précision des résultats qu'au niveau de la rapidité des calculs.

Il existe plusieurs types de générateurs de nombres aléatoires.

Si on utilise un générateur aléatoire ou « pseudo » aléatoire, cela conduit à une technique de Monte Carlo. Si on utilise un générateur « quasi » aléatoire, cela conduit à une technique de quasi Monte Carlo.

Les premiers générateurs sont les plus simples à utiliser, puisqu'ils sont supposés produire des nombres vraiment aléatoires selon un sens commun (c'est-à-dire qu'on ne peut pas prédire le prochain nombre). Ce type de générateur produit une suite (pseudo aléatoire) de nombres compris entre 0 et $m-1$ qui est donc de période m .

La plupart des générateurs sont de type « congruentiel », c'est-à-dire qu'ils fournissent une suite d'entiers, donnés par la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = a \cdot x_n + c \pmod{m}$$

Formule 2.1 : Exemple de relation permettant la génération d'une suite pseudo-aléatoire

Avec « a » qui est un multiplicateur, « c » l'accroissement et « m » le module de la suite.

La suite x_n prend ses valeurs comprises entre $[0$ et $m-1]$. En divisant les résultats obtenus par m , on obtient une suite de nombre répartis uniformément sur $[0,1]$.

Les améliorations peuvent se faire en augmentant la période. Par exemple, le générateur Mersenne Twister a une période de 10^{6000} .

Le Quasi-Monte-Carlo est le passage au déterministe, basé sur le principe selon lequel le tirage de points est une affaire trop sérieuse pour être confiée au hasard. Quasi-aléatoire et pseudo-aléatoire sont ainsi tous deux des suites déterministes, mais alors que l'esprit « pseudo-aléatoire » consiste à chercher des suites aussi proches du hasard que possible, le « quasi-aléatoire » cherche à faire mieux. En fait, la méthode revient à chercher des points qui minimisent la dispersion. Le Quasi-Monte-Carlo est bien adapté à des problèmes « simples » comme par exemple un calcul de superficie mais il est plus rarement utilisé dans les calculs d'incertitudes de mesure car il peut générer des corrélations entre les valeurs d'entrées.

Un bon générateur aléatoire doit remplir les exigences suivantes :

- indépendance des nombres générés (ils ne doivent donc pas être corrélés)
- tirages répartis uniformément sur tout l'intervalle
- très longue période
- efficacité (compte tenu du très grand nombre de fois qu'est appelé le générateur, il faut que le programme soit le plus simple possible et nécessite peu d'opérations coûteuses en temps de calcul).

Maintenant que nous avons vu ce qu'était la MCM et comment elle génère des nombres aléatoires, nous allons voir comment la MCM est utilisée pour estimer les incertitudes de mesure.

2.3 Principe de fonctionnement de la MCM appliqué au calcul d'incertitude

Pour commencer, il ne faut pas croire que la MCM est une méthode miracle qui va remplacer la méthode analytique proposée par le GUM.

En réalité, tout le travail d'analyse demandé dans la méthode analytique est également nécessaire avec la MCM.

La MCM va servir à remplacer l'étape de la méthode analytique qui propage les incertitudes.

Quand on souhaite estimer des incertitudes de mesure, il faut comme dans la méthode analytique du GUM, établir un modèle physique (mathématique) correct qui relie les entrées à la sortie.

Il faut connaître le modèle des fonctions de distribution de probabilité (PDF) des entrées pour savoir quelles sont les valeurs possibles pour les entrées..

A l'aide d'un générateur pseudo aléatoire, on fait des tirages uniformes sur l'intervalle [0,1].

A partir de ces tirages uniformes, on souhaite réaliser les PDF des entrées.

Le distribution de probabilité est représentée par la fonction $f(x)$ sur un intervalle I , telle que $\int f(x).dx = 1$ (condition de normalisation de la probabilité). Il existe plusieurs méthodes qui permettent de générer des distributions non uniformes.

La méthode de la Transformation Inverse

Soit une distribution de probabilité $f(x)$ définie sur un intervalle I . Considérons la distribution de probabilité cumulée F telle que

$$F(x) = \int f(t) dt$$

Formule 2.2 : Fonction de répartition

S'il existe une fonction inverse F^{-1} , alors $u = F^{-1}(x)$ définit une fonction de distribution cumulée pour une variable aléatoire de distribution uniforme sur l'intervalle [0, 1].

Si on considère la distribution de probabilité cumulée $F(x) = 1 - x$, on obtient immédiatement que u est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle unité, $1 - u$ est aussi une variable uniforme sur le même intervalle.

Cette méthode présente l'avantage d'être simple à appliquer mais comme nous allons le voir, il y a des cas où elle ne fonctionne pas.

La Méthode de Box-Muller

La distribution gaussienne est très fréquemment utilisée dans les simulations.

Malheureusement, la distribution cumulée est une fonction erreur. Pour une gaussienne de variance unité centrée à zéro, notée classiquement $N(0, 1)$ (loi Normale centrée), on a :

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Formule 2.3 : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Cette fonction n'est pas inversible et l'on ne peut pas appliquer la méthode de la transformation inverse. On peut toutefois considérer un couple de variables aléatoires (x, y) avec une distribution gaussienne chacune. En utilisant la transformation en coordonnées polaires, la distribution de probabilité jointe $f(x, y)dx.dy$ se transforme en $f(r, \theta)r.dr.d\theta$, soit encore $f(r^2)dr^2d\theta = \exp(-r^2/2)/2dr^2d\theta$. La variable r^2 est une variable aléatoire avec une distribution exponentielle de moyenne $1/2$, et θ est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Si u et v sont des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$, on a

$$x = \sqrt{-2 \ln(u)} \cos(2\pi v)$$
$$y = \sqrt{-2 \ln(u)} \sin(2\pi v)$$

Formule 2.4 : Variables distribuées suivant une loi normale centrée

A partir de u et v qui sont deux variables aléatoires indépendantes, nous obtenons x et y qui sont deux variables distribuées suivant une loi normale centrée.

Il existe d'autres méthodes comme par exemple la Méthode des rapports de nombres aléatoires uniformes : ROU (Ratio of uniform numbers) ou la Méthode d'acceptation et de refus, mais ces méthodes sont plus difficiles à utiliser que les deux précédentes.

A présent, il est possible de propager les densités de probabilité des entrées.

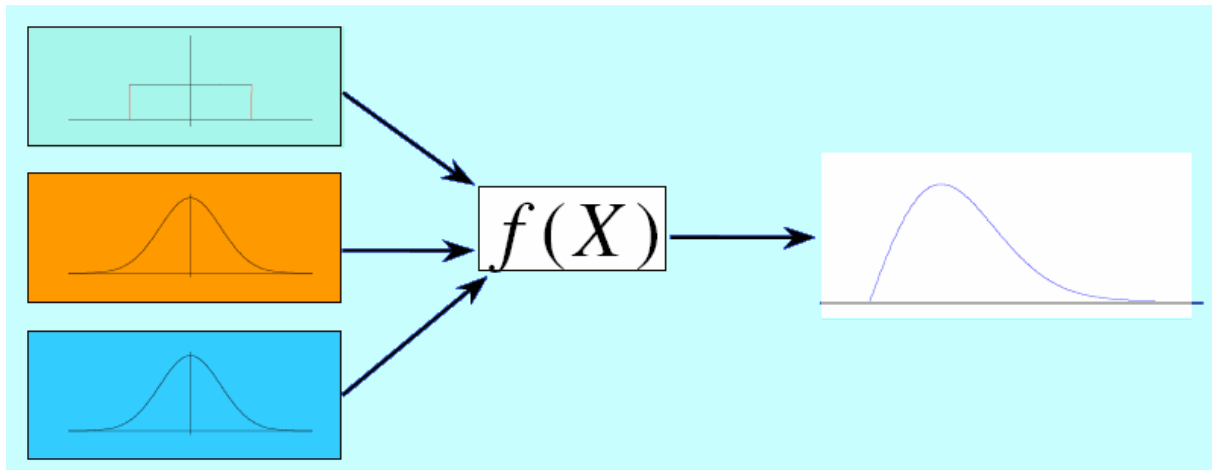


Figure 2.1 : Principe de la propagation des incertitudes par la MCM

Les modèles théoriques des PDF représentant les entrées sont généralement des lois uniformes, triangulaires ou normales. On peut dès à présent noter que la propagation des incertitudes à l'aide de la Méthode de Monte Carlo donne une distribution quelconque.

Nous avons donc des valeurs numériques pour les valeurs d'entrée, nous possédons un modèle du système, il ne reste plus qu'à résoudre le système pour chaque réalisation. Les statistiques d'ensemble sur le système permettent de trouver la moyenne, la variance...

Le principe de la MCM est que plus le nombre de tirages aléatoires est grand et plus l'estimation est proche de la véritable valeur.

Plus le système comporte d'entrées et plus il sera nécessaire de procéder à un grand nombre de tirages pour atteindre un bon degré d'estimation.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer la vitesse de convergence. Une de ces méthodes peut être l'utilisation du théorème de la limite centrale.

Nous allons à présent essayer de voir pourquoi la MCM fonctionne. C'est-à-dire, comment se fait-il que plus l'on effectue de tirages, plus on converge vers les bonnes valeurs ?

Le principe repose sur la loi des grands nombres. La loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques du tirage (l'échantillon) se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population. Mais il est intéressant de noter que la taille de l'échantillon à prendre pour approcher les caractéristiques de la population initiale ne dépend que faiblement voire pas du tout de la taille de la série initiale.

X_1, X_2, \dots, X_N est une suite de variables aléatoires (il s'agit de N tirages indépendants).

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X]$$

Formule 2.5 : Loi des grands nombres qui démontre la convergence de la MCM

Si on procède à un nombre suffisant de tirages, alors la moyenne des valeurs trouvées converge vers la valeur théorique.

Pour obtenir une bonne approximation en utilisant la Méthode de Monte Carlo, il faut faire plusieurs dizaines de milliers de tirages (certains recommandent même de faire un million de tirages).

2.4 Les limites de la méthode de Monte Carlo

Le principal inconvénient de la MCM est qu'il faut suffisamment de simulations pour obtenir un résultat qui s'approche de la réalité.

En fonction de la complexité du système à étudier et de la précision que l'on désire atteindre, la méthode de Monte Carlo peut nécessiter une puissance de calcul plus que conséquente.

Bien que la puissance des ordinateurs ait considérablement progressé et que les algorithmes se soient améliorés, il existe encore des cas où la simulation de Monte Carlo n'est pas adaptée car les temps de calcul seraient bien trop longs.

Dans les cas où l'on ne disposerait pas d'assez de puissance de calcul, il faudrait se tourner vers d'autres méthodes de simulation.

En fonction du système étudié, il peut en effet exister des simulations qui convergent plus vite que la MCM, ce qui signifie que moins de calculs seront nécessaires. Il existe aussi des simulations avec des algorithmes plus légers, ce qui signifie que les simulations se font plus rapidement.

Par exemple, Monsieur Le Maître [13] a travaillé sur des écoulements réactifs et il a essayé de quantifier et propager les incertitudes dans des modèles numériques.

Même dans le cas déterministe, la simulation de ces systèmes est coûteuse et pose des difficultés, notamment en raison de la résolution couplée des équations de Navier Stokes avec les équations décrivant les évolutions des concentrations des différentes espèces chimiques en présence. Aussi, l'analyse de l'influence de multiples paramètres incertains (par exemple les taux de réactions, les concentrations initiales, l'intensité du champ électrique appliqué au système, ...) par des techniques déterministes de type Monte Carlo se révèle impossible du fait de la quantité de réalisations nécessaires pour obtenir des statistiques convergées (typiquement plusieurs dizaines de milliers). A l'inverse, les techniques spectrales permettent de représenter de manière beaucoup plus compacte la dépendance de la solution vis à vis des paramètres incertains (typiquement d'une dizaine à quelques centaines de modes selon le nombre de paramètres considérés). De plus, le format de la représentation spectrale permet une analyse plus fine des effets conjugués de plusieurs paramètres. Comparativement aux techniques de type Monte Carlo, les qualités des représentations spectrales ne présentent en fait une supériorité réelle que si le calcul numérique des modes stochastiques n'est pas d'un coût prohibitif : l'exploitation des avantages potentiels de la représentation spectrale passe par le développement et la mise au point de techniques numériques adaptées.

A présent que nous avons vu ce qu'était la méthode analytique préconisée par la GUM et la Méthode de Monte Carlo préconisée par le supplément 1 du GUM, nous allons établir des comparaisons entre ces deux méthodes.

Chapitre 3 – Comparaison de la méthode analytique avec la méthode de Monte Carlo

3.1 Différences dans la façon de propager l'incertitude

La majorité des systèmes physiques se composent d'une ou plusieurs entrées et d'une sortie.

La théorie du GUM est que les incertitudes des entrées sont caractérisées par des distributions de probabilités. Pour des raisons de simplification, on considère souvent que les entrées suivent des lois uniformes, triangulaires ou normales.

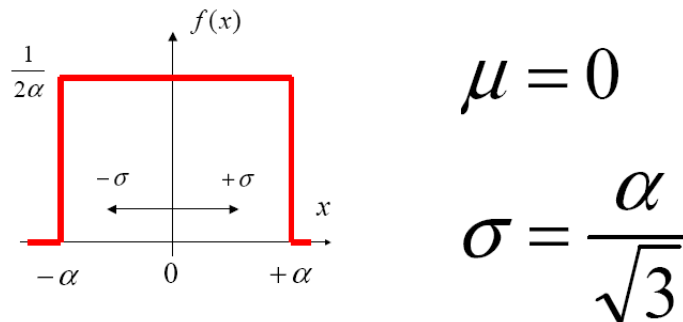


Figure 3.1 : Représentation d'une loi uniforme

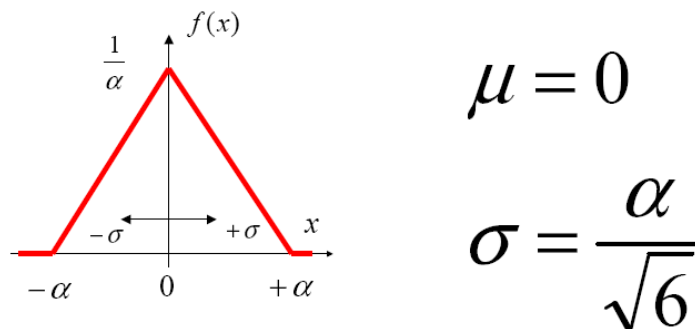


Figure 3.2 : Représentation d'une loi triangulaire

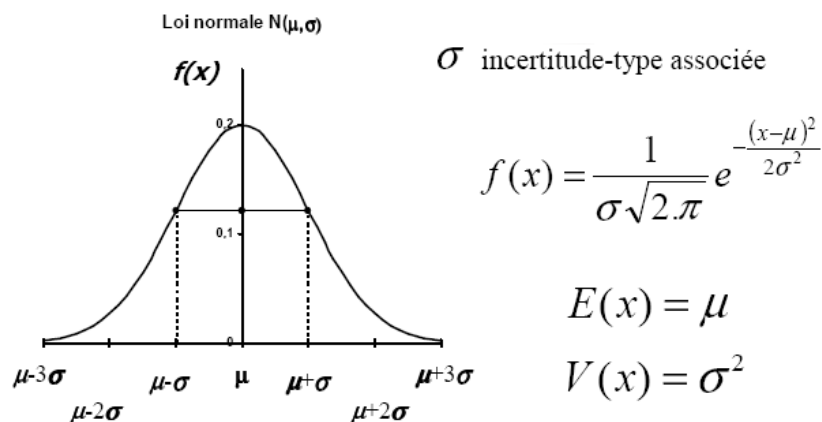


Figure 3.3 : Représentation d'une loi normale

Plutôt que de travailler avec les distributions elles-mêmes, l'approche GUM consiste à utiliser les paramètres caractéristiques des distributions, à savoir les espérances (moyennes), écarts type (et covariances dans le cas des distributions communes) et degrés de liberté si cela s'avère approprié.

En sortie, nous obtenons une espérance et un écart-type et la sortie est souvent représentée sous la forme d'une loi normale. A partir d'une loi normale, il est facile de donner un intervalle de confiance.

Avec la méthode de Monte Carlo, ce sont cette fois les distributions qui sont propagées.

Cela a pour conséquence que l'on peut se retrouver en sortie avec des distributions quelconques.

Si la distribution de sortie a une forme symétrique, alors on peut déterminer l'intervalle de confiance de la même manière que celui pratiqué dans la méthode analytique du GUM.

Si la distribution de sortie a une forme non symétrique, alors il faut chercher quel est l'intervalle de confiance le plus petit qui donne la confiance recherchée (généralement, 95%).

La Méthode de Monte Carlo peut donc donner une distribution en sortie qui est différente de la distribution approximative fournie par la méthode analytique du GUM.

Le supplément 1 du GUM donne plusieurs exemples avec des systèmes physiques qui ont en entrée des distributions non symétriques pour lesquelles, il peut être difficile avec la méthode analytique de trouver les paramètres caractéristiques, alors que la Méthode de Monte Carlo les manipule sans difficulté.

Le supplément 1 du GUM démontre également que les intervalles de confiance fournis par la Méthode de Monte Carlo sont physiquement réalisables, ce qui ne pourrait pas être forcément le cas si l'intervalle de confiance avait été caractérisé par une distribution normale, comme c'est souvent le cas avec la méthode analytique du GUM.

3.2 Les modèles linéaires et non linéaires

Les systèmes physiques sont caractérisés par des modèles qui peuvent être linéaires ou non linéaires. Il existe certains systèmes (par exemple dans le cas de la météorologie [15]), où il est possible de choisir un modèle linéaire ou bien un modèle non linéaires.

Le principe d'un modèle linéaire est d'établir une relation linéaire entre une ou plusieurs variables.

Il est généralement plus simple de propager l'incertitude dans un modèle linéaire.

Pour des raisons de simplification, il peut arriver que l'on décide de transformer un système physique qui n'a pas un modèle non linéaire, en un système linéaire, en supprimant par exemple des variables secondaires de la relation.

Un exemple de modèle linéaire serait, par exemple, de souhaiter connaître le volume d'un matériau. Il n'est pas facile de déterminer directement le volume d'un objet, aussi, nous procédons de façon indirecte, en mesurant la masse de l'objet. En utilisant la relation linéaire

qui dit que le volume est égal à la masse de l'objet, divisé par la masse volumique, on retrouve le volume de l'objet.

Si on traitait cet exemple linéaire avec la méthode analytique du GUM et la méthode de Monte Carlo, on devrait obtenir des résultats très similaires. Compte tenu de la simplicité de l'exemple, il n'y a pas lieu d'utiliser la Méthode de Monte Carlo.

Nous allons à présent voir un exemple simple de modèle non linéaire.

Supposons que l'on veuille connaître la hauteur d'une tour. Pour cela, nous allons lâcher un objet du sommet de la tour et mesurer la durée qu'il met à atteindre le sol. Nous supposons que l'on est dans les conditions idéales du vide et nous utiliserons la formule suivante :

$$Y = \frac{1}{2} g T^2$$

Formule 3.1 : Relation entrée la durée de chute d'un objet et la hauteur parcourue

Avec Y qui est la hauteur de la tour, T qui est la durée de la chute de l'objet et g qui est l'accélération due à la gravité terrestre d'une valeur approximative de $9,81 \text{ m/s}^2$.

Nous effectuons dix mesures de la durée de la chute de l'objet et on obtient les valeurs suivantes en secondes : {2.9, 2.8, 3.2, 3.5, 2.5, 2.4, 3.6, 2.7, 3.3, 3.1}.

Si nous appliquons la méthode analytique préconisée par le GUM, à partir des résultats de mesures, on calcule l'espérance et la variance de T et on propage ces valeurs dans le système. Dans notre exemple, on trouve que l'objet met en moyenne 3 secondes à atteindre le sol et en propageant cette valeur dans le modèle, on trouve pour la hauteur de tour une espérance de 44,1 mètres.

On peut noter que si l'on ajoute deux autres mesures de 2 secondes et 4 secondes, cela ne change pas la valeur moyenne du temps, qui reste à 3 secondes. Cela ne change donc pas l'estimation de la hauteur de la tour.

Avec la méthode analytique, nous avons utilisé la formule suivante pour estimer la hauteur de la tour :

$$\hat{Y} = f(\bar{X})$$

Formule 3.2 : Pour trouver l'espérance de Y , on utilise la valeur moyenne de X .

Maintenant, nous allons essayer d'estimer la hauteur de la tour en utilisant la méthode de Monte Carlo. Nous reprenons les valeurs discrètes utilisées plus haut : {2.9, 2.8, 3.2, 3.5, 2.5, 2.4, 3.6, 2.7, 3.3, 3.1}. Pour chacune de ces valeurs, on trouve une valeur de la hauteur de la tour. L'espérance mathématique de la hauteur de la tour sera la valeur moyenne de toutes les valeurs de tour trouvées, c'est-à-dire 44,8 mètres.

Si avec la méthode de Monte Carlo, on ajoute 2 autres valeurs qui sont 2 secondes et 3 secondes, cela a pour conséquence de changer l'espérance mathématique de la hauteur de la tour.

Avec la méthode de Monte Carlo, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\hat{Y}_2 = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k),$$

Formule 3.3 : Pour trouver l'espérance de Y, on prend la moyenne des valeurs de sortie

Nous pouvons donc constater qu'une fonction non linéaire d'une moyenne d'échantillons est différente de la moyenne de cette fonction évaluée pour chaque élément de l'échantillon. Dans le cas d'un modèle non linéaire, l'utilisation de la méthode analytique ou de celle de Monte Carlo entraîne donc des conséquences sur le résultat.

3.3 Valeur unique des valeurs d'entrée

Le GUM considère qu'une quantité physique peut être caractérisée par une valeur unique (GUM 4.1.1, note 1).

Si on prend par exemple la masse d'un objet, le GUM considère que l'objet possède une valeur unique. Si on effectue plusieurs pesées de cet objet, il y a de fortes chances que chaque pesée donne un résultat différent. Le GUM considère que cette variation des résultats est due aux erreurs expérimentales.

Cependant, il faut se méfier car une valeur physique mesurée n'est pas toujours égale à une valeur fixe + une erreur due à la mesure. Parfois, la valeur fixe n'en est pas réellement une car elle peut évoluer avec le temps.

Prenons par exemple le cas de la mesure d'une résistance.

Pour déterminer la résistance, nous allons utiliser la formule $U = R \cdot I$ (avec U qui est la tension appliquée aux bornes de la résistance, I l'intensité qui circule dans la résistance et R qui est la résistance)..

Si on est sûr que U et I sont absolument constants dans le temps, alors on peut faire 10 mesures de U et I, puis calculer leur espérance et leur variance et propager leurs valeurs à travers le modèle et ainsi estimer la valeur de la résistance.

Si U et I sont susceptibles d'évoluer de façon non négligeable dans le temps, appliquer la méthode analytique du GUM risque de donner un résultat erroné.

Dans le cas où U et I sont susceptibles d'évoluer de façon non négligeable, la méthode de Monte Carlo peut s'avérer plus juste dans le sens où pour chaque mesure de U et de I, il y a un calcul de R.

Supposons que nous ayons les valeurs suivantes :

U (V)	I (A)	R (Ω)
1,5	0,00150	997
1,6	0,00160	1000
1,7	0,00169	1003
		$\mu = 1000$

Avec ces 3 valeurs de U et de I, nous trouvons que l'espérance de R est de 1000 ohms.

Si on applique la méthode analytique, on trouve que la valeur moyenne de U est de 1,6 V, que la valeur moyenne de I est de 0,00159 A et en propageant ces valeurs, on trouve que la valeur moyenne de R est de 1006 ohms.

Cet exemple permet de constater que la méthode de Monte Carlo permet d'obtenir de bonnes estimations de la sortie dans les cas où les valeurs d'entrée peuvent évoluer dans le temps.

Conclusion

La sélection de la méthode analytique ou numérique doit se faire après étude du système étudié et de ses besoins. Généralement, il est conseillé de ne choisir une méthode numérique que lorsque le système est trop complexe pour faire directement l'objet d'une modélisation.

Nous avons vu que la méthode de Monte Carlo présente de nombreux avantages dans le calcul des incertitudes grâce notamment à sa simplicité. Alors qu'avec la méthode analytique, il peut être délicat de propager des entrées asymétriques, la méthode de Monte Carlo peut elle sans difficulté propager n'importe quelle distribution

Cependant, il faut savoir que cette simulation comporte tout de même des limites, notamment à cause de la puissance de calcul nécessaire qui peut être très importante dans le cas d'un système complexe avec un grand nombre d'entrées.

La Méthode de Monte Carlo est de plus en plus efficace, grâce à la constante amélioration des ordinateurs et grâce à l'amélioration des algorithmes. Grâce à l'évolution de la puissance informatique qui devrait encore progresser dans les années à venir, on peut supposer que les méthodes de simulation pourront être utilisées pour traiter des systèmes encore plus complexes. L'utilisation des simulations dans le calcul des incertitudes de mesure devrait devenir de plus en plus fréquente.

Bibliographie

Ouvrages :

[1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP et OIML. *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (première édition 1995). Genève : Organisation internationale pour la standardisation. ISBN 92-67-10188-9

[2] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP et OIML. *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie* (publication 1993). Genève : Organisation internationale pour la standardisation. ISB 92-67-01075-1

[3] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP et OIML. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the « Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement » - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Genève : Organisation internationale pour la standardisation. ISBN 92-67-10188-9

[4] Cofrac. *EA guidelines on the expression of uncertainty in quantitative testing*. (avril 2004)

Articles :

[5] R.Eckhardt. *STAN ULAM, JOHN VON NEUMANN, and the MONTE CARLO METHOD*. Los Alamos Science, (1987).

[6] M. G. Cox et B. R . L. Siebert. *The use of a Monte Carlo methode for evaluating uncertainty and expanded uncertainty*. Metrologia, 43, 178-188 (2006).

[7] W. Bich et M. G. Cox. *Special issue on Statistical and Probalistic Methods for Metrology*. Metrologia.

[8] W. Bich, L. Callegaro et F. Pennechi. *Non-linear models and best estimates in the GUM*. Metrologia, 43, 196-199 (2006)

[9] W. Bich, M. G. Cox et P. M. Harris. *Evolution of the « Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement »*. Metrologia, 43, 161-166 (2006)

[10] S. Léger. *Monte Carlo pour les nuls*. (6 avril 2006)

[11] P. Aude, P. Depecker et G.Krauss. *Modelling and uncertainty : Comparison between two approaches of estimation of the reliability of numerical modelling results*. Journal de physique. III, volume 7, n°1, pages 179-193 (1997)

Sites Internet :

[12] http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Monte-Carlo

- [13] <http://www.limsi.fr/RS2003FF/MECA2003/DTI2003/DTI11/dti11.html>
- [14] <http://www.supelec.fr/ecole/mesures/pe/FleuryRech.html>
- [15] http://www.lri-annaba.net/khadir_tarek/khadir/prediction1.htm